Fondamentaux pour l'Informatique Graphique

Aldo Gonzalez-Lorenzo (aldo.gonzalez-lorenzo@univ-amu.fr)

22 septembre 2022

Question 1.

Démontrer la loi des sinus
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
en utilisant la définition du sinus comme rapport de longueurs.

Question 2.

Démontrer la formule de la somme de cosinus : $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Question 3.

Démontrer que $|\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$. En déduire qu'un vecteur normalisé $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ est unitaire.
Normaliser le vecteur $\vec{u} = (2,3)^\intercal$.

Question 4.

Calculer l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = (2,0,3)^\intercal$ et $\vec{v} = (4,-1,-2)^\intercal$.

Question 5.

Vérifier que $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $(\vec{u} + \vec{u'}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u'} \cdot \vec{v}$.

Question 6.

Démontrer que le vecteur $\vec{u} = (-y,x)^\intercal$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{v} = (x,y)^\intercal$.

Question 7.

Trouver un vecteur orthogonal aux vecteurs unitaires $\vec{u} = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})^\intercal$ et $\vec{v} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3})^\intercal$. Est-il unitaire aussi ?

Question 8.

Soient $P,Q,R \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ (trois points du plan affine), vérifier que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (relation de Chasles).

Question 9.

Déduire l'équation implicite d'une droite dans le plan affine à partir de son équation paramétrique $X = P + \lambda\vec{u}$. N'osez pas diviser par zéro.

Question 10.

Trouver l'équation implicite de la droite passant par le point $P(1,2)$ avec vecteur normal $\vec{n} = (1,2)^\intercal$. Calculer la distance vers le point $Q(-3,5)$.

Question 11.

Trouver les coordonnées du point d'intersection entre la droite de l'exercice précédent et la droite avec équation $3x - y + 5 = 0$.

Question 12.

On se donne un polygone dans le plan affine défini par une liste de points $[P_1, \dots, P_n]$. Trouver un algorithme qui reconnaît s'il est orienté dans le sens trigonométrique. Utilisez le test d'orientation de trois points.

Question 13.

Dans un polygone convexe, un point est à l'intérieur s'il se trouve à gauche de tous les segments.
Déduire un algorithme pour trouver si un point du plan affine est contenu dans un polygone convexe.

Question 14.

Étant donné un polygone dans le plan affine défini par une liste de points, trouver un algorithme qui calcule si le polygone est convexe en utilisant le test d'orientation de trois points.

Question 15.

Obtenir l'équation paramétrique du segment entre les points $P(-3,1)$ et $Q(2,4)$.

Question 16.

La droite $x + y + 2 = 0$ intersecte-t-elle le segment $[P(-2,1), Q(0,1)]$? Si oui, trouver le point d'intersection.

Question 17.

Dans un polygone (non nécessairement convexe), un point est à l'intérieur si une demi-droite partant de lui intersecte le bord du polygone un nombre impaire de fois. Dériver un algorithme pour trouver si un point se trouve à l'intérieur d'un polygone.

Question 18.

Calculer la distance entre le point $P(1,-1)$ et le segment $[A(-2,3), B(3,4)]$. Aussi pour le point $P'(4,1)$. En déduire un algorithme de distance point–segment.

Question 19.

Trouver un algorithme qui calcule la distance entre deux triangles dans le plan affine. On considère que la distance est zéro s'ils s'intersectent.

Question 20.

Déduire l'aire d'un triangle dans l'espace affine en utilisant le produit vectoriel.

Question 21.

Trouver l'équation de la droite passant par les points $P(1, 0, 0)$ et $Q(3, 2, 1)$.

Question 22.

Trouver l'équation du plan passant par les points $P(1, 0, 0)$, $Q(3, 2, 1)$ et $R(-2, 1, 0)$.

Question 23.

Les points $P(1, 0, 0)$, $Q(3, 2, 1)$ et $R(-2, 1, 0)$ sont-ils *colinéaires* (alignés) ?

Question 24.

Les plans $x+y+z-4=0$ et $-2x+2z+1=0$ s'intersectent-ils ? Si oui, trouver un point dans l'intersection. Profitez de ce point pour trouver l'équation paramétrique de la droite d'intersection entre ces deux plans.

Question 25.

Nous voulons détecter les arêtes vives d'un maillage, c'est-à-dire les arêtes du maillage dont l'angle entre ses deux triangles adjacents est plus grand qu'un certain seuil θ.
Autour d'une certaine arête nous avons deux triangles

$$[P_1(12.5, -8.1, 3.0), P_2(13.1, -7.5, 3.1), P_3(12.8, -7.7, 3.6)]$$

et

$$[P_2(13.1, -7.5, 3.1), P_1(12.5, -8.1, 3.0), P_4(12.6, -8.0, 3.9)].$$

Calculer si leur angle est plus grand que $6\pi/10$.

Question 26.

Soit $T = [P_1(12.5, -8.1, 3.0), P_2(13.1, -7.5, 3.1), P_3(12.8, -7.7, 3.6)]$ un triangle orienté, voit-on sa face depuis le point $V(20, 0, 20)$?

Question 27.

La loi de Lambert décrit combien de lumière reçoit une surface à partir d'un point de lumière en fonction de l'angle. Formellement, elle dit que l'intensité de l'illumination est proportionnelle au cosinus de l'angle entre le vecteur normale de la surface et la direction de la source de lumière. Entre autres, elle explique pourquoi il fait plus chaud dans l'équateur que dans les pôles.
Calculer ce ratio dans le centre du triangle

$$[P_1(12.5, -8.1, 3.0), P_2(13.1, -7.5, 3.1), P_3(12.8, -7.7, 3.6)]$$

et le point de lumière $L(10, -10, 20)$.

Question 28.

Calculer la distance entre le point $P(1, -1, 0)$ et le plan $x + z + 2 = 0$.

Question 29.

Trouver la projection du point $P(1, 2, 3)$ sur le plan $2x + y - 3z - 1 = 0$.

Question 30.

Trouver la distance entre le point $P(1, 2, 3)$ et la droite passant par le point $Q(-1, 2, -3)$ avec vecteur directeur $\vec{u} = (1, 0, 1)^\intercal$.

Question 31.

Calculer la distance entre le point $P(0, 0, 1)$ et le segment $[A(-1, 0, 1), B(1, 2, 0)]$.

Question 32.

Décrire un algorithme qui calcule la distance entre un point et un triangle.

Question 33.

Décrire un algorithme pour estimer un vecteur normal dans un sommet d'un maillage en fonction des triangles adjacents.

Question 34.

Décrire un algorithme pour calculer le volume d'un maillage triangulaire fermé en utilisant le test d'orientation de quatre points.

Question 35.

Dans un algorithme de remaillage (*remeshing*), nous voulons déplacer les sommets d'un maillage. Pour chaque sommet P, nous calculons ses nouvelles coordonnées P' avec une certaine formule, qui est arbitrairement proche du point initial. Nous voulons ensuite projeter ce point P' sur le maillage initial, c'est à dire sur l'un des triangles adjacents. Décrivez un algorithme pour le faire.