Fondamentaux pour l'Informatique Graphique

Aldo Gonzalez-Lorenzo (aldo.gonzalez-lorenzo@univ-amu.fr)

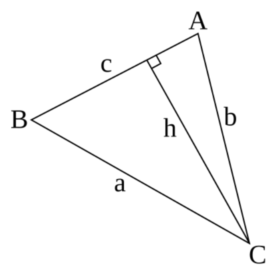
Semestre impair 2024-2025

Question 1.

Démontrer la loi des sinus

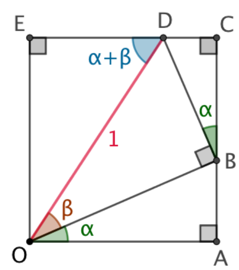
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

en utilisant la définition du sinus comme rapport de longueurs. Vous pouvez vous servir du schema suivant :



Question 2.

Démontrer la formule de la somme de cosinus : $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Vous pouvez utiliser ce schema :



Question 3.

Démontrer que $|\lambda\cdot\vec{u}| = |\lambda|\cdot|\vec{u}|$. En déduire qu'un vecteur normalisé $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ est unitaire.
Normaliser le vecteur $\vec{u} = (2,3)^\intercal$.

Question 4.

Calculer l'angle entre les vecteurs $\vec{u} = (2,0,3)^\intercal$ et $\vec{v} = (4,-1,-2)^\intercal$.

Question 5.

Vérifier que $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $(\vec{u}+\vec{u'})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u'}\cdot\vec{v}$.

Question 6.

Démontrer que le vecteur $\vec{u} = (-y, x)^\intercal$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{v} = (x, y)^\intercal$.

Question 7.

Trouver un vecteur orthogonal aux vecteurs unitaires $\vec{u} = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})^\intercal$ et $\vec{v} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3})^\intercal$. Est-il unitaire aussi ?

Question 8.

Soient $P, Q, R \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ (trois points du plan affine), vérifier que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (relation de Chasles).

Question 9.

Déduire l'équation implicite d'une droite dans le plan affine à partir de son équation paramétrique $X = P + \lambda\vec{u}$. N'osez pas diviser par zéro.

Question 10.

Trouver l'équation implicite de la droite passant par le point $P(1, 2)$ avec vecteur normal $\vec{n} = (1, 2)^\intercal$. Calculer la distance vers le point $Q(-3, 5)$.

Question 11.

Trouver les coordonnées du point d'intersection entre la droite de l'exercice précédent et la droite avec équation $3x - y + 5 = 0$.

Question 12.

On se donne un polygone dans le plan affine défini par une liste de points $[P_1, \ldots, P_n]$. Trouver un algorithme qui reconnaît s'il est orienté dans le sens trigonométrique. Utilisez le test d'orientation de trois points.

Question 13.

Dans un polygone convexe, un point est à l'intérieur s'il se trouve à gauche de tous les segments.
Déduire un algorithme pour trouver si un point du plan affine est contenu dans un polygone convexe.

Question 14.

Étant donné un polygone dans le plan affine défini par une liste de points, trouver un algorithme qui calcule si le polygone est convexe en utilisant le test d'orientation de trois points.

Question 15.

Obtenir l'équation paramétrique du segment entre les points $P(-3, 1)$ et $Q(2, 4)$.

Question 16.

La droite $x+y+2=0$ intersecte-t-elle le segment $[P(-2,1), Q(0,1)]$? Si oui, trouver le point d'intersection.

Question 17.

Dans un polygone (non nécessairement convexe), un point est à l'intérieur si une demi-droite partant de lui intersecte le bord du polygone un nombre impaire de fois. Dériver un algorithme pour trouver si un point se trouve à l'intérieur d'un polygone.

Question 18.

Calculer la distance entre le point $P(1,-1)$ et le segment $[A(-2,3), B(3,4)]$. Aussi pour le point $P'(4,1)$. En déduire un algorithme de distance point–segment.

Question 19.

Trouver un algorithme qui calcule la distance entre deux triangles dans le plan affine. On considère que la distance est zéro s'ils s'intersectent.

Question 20.

Déduire l'aire d'un triangle dans l'espace affine en utilisant le produit vectoriel.

Question 21.

Trouver l'équation de la droite passant par les points $P(1,0,0)$ et $Q(3,2,1)$.

Question 22.

Trouver l'équation du plan passant par les points $P(1,0,0)$, $Q(3,2,1)$ et $R(-2,1,0)$.

Question 23.

Les points $P(1,0,0)$, $Q(3,2,1)$ et $R(-2,1,0)$ sont-ils *colinéaires* (alignés) ?

Question 24.

Les plans $x+y+z-4=0$ et $-2x+2z+1=0$ s'intersectent-ils ? Si oui, trouver un point dans l'intersection. Profitez de ce point pour trouver l'équation paramétrique de la droite d'intersection entre ces deux plans.

Question 25.

Nous voulons détecter les arêtes vives d'un maillage, c'est-à-dire les arêtes du maillage dont l'angle entre ses deux triangles adjacents est plus grand qu'un certain seuil θ.
Autour d'une certaine arête nous avons deux triangles

$$[P_1(12.5, -8.1, 3.0), P_2(13.1, -7.5, 3.1), P_3(12.8, -7.7, 3.6)]$$

et

$$[P_2(13.1, -7.5, 3.1), P_1(12.5, -8.1, 3.0), P_4(12.6, -8.0, 3.9)].$$

Calculer si leur angle est plus grand que $6\pi/10$.

Question 26.

Soit $T = [P_1(12.5, -8.1, 3.0), P_2(13.1, -7.5, 3.1), P_3(12.8, -7.7, 3.6)]$ un triangle orienté, voit-on sa face depuis le point $V(20, 0, 20)$?

Question 27.

La loi de Lambert décrit combien de lumière reçoit une surface à partir d'un point de lumière en fonction de l'angle. Formellement, elle dit que l'intensité de l'illumination est proportionnelle au cosinus de l'angle entre le vecteur normale de la surface et la direction de la source de lumière. Entre autres, elle explique pourquoi il fait plus chaud dans l'équateur que dans les pôles.
Calculer ce ratio dans le centre du triangle

$$[P_1(12.5, -8.1, 3.0), P_2(13.1, -7.5, 3.1), P_3(12.8, -7.7, 3.6)]$$

et le point de lumière $L(10, -10, 20)$.

Question 28.

Calculer la distance entre le point $P(1, -1, 0)$ et le plan $x + z + 2 = 0$.

Question 29.

Trouver la projection du point $P(1, 2, 3)$ sur le plan $2x + y - 3z - 1 = 0$.

Question 30.

Trouver la distance entre le point $P(1, 2, 3)$ et la droite passant par le point $Q(-1, 2, -3)$ avec vecteur directeur $\vec{u} = (1, 0, 1)^\intercal$.

Question 31.

Calculer la distance entre le point $P(0, 0, 1)$ et le segment $[A(-1, 0, 1), B(1, 2, 0)]$.

Question 32.

Décrire un algorithme qui calcule la distance entre un point et un triangle.

Question 33.

Décrire un algorithme pour estimer un vecteur normal dans un sommet d'un maillage en fonction des triangles adjacents.

Question 34.

Décrire un algorithme pour calculer le volume d'un maillage triangulaire fermé en utilisant le test d'orientation de quatre points.

Question 35.

Dans un algorithme de remaillage (*remeshing*), nous voulons déplacer les sommets d'un maillage. Pour chaque sommet P, nous calculons ses nouvelles coordonnées P' avec une certaine formule, qui est arbitrairement proche du point initial. Nous voulons ensuite projeter ce point P' sur le maillage initial, c'est à dire sur l'un des triangles adjacents. Décrivez un algorithme pour le faire.

Question 36.

Calculer la matrice de transformation d'une mise à l'échelle de facteur 2 autour du point $P(1,3)$.
Vérifier que P ne change pas et que $(1,4)$ va dans $(1,5)$.

Question 37.

Montrer un exemple concret de translation T_1 et de mise à l'échelle T_2 telles que $T_1 \circ T_2$ n'est pas pareil que $T_2 \circ T_1$.

Question 38.

Calculer la matrice de rotation de $\pi/6$ radians. Avez-vous utilisé les coordonnées homogènes ?

Question 39.

L'ordre entre une mise à l'échelle et une rotation est-il important ? Confirmez votre intuition avec une matrice.

Question 40.

Calculer les coordonnées du point $P(1,-1,2)$ après avoir fait une rotation de $\pi/4$ radians autour de l'axe Oz et de $2\pi/3$ radians autour de l'axe Ox.
Feriez-vous la même chose s'il fallait transformer un million de points ?

Question 41.

Calculer la matrice de transformation d'une rotation de $\pi/4$ radians autour de la droite $x=1, y=2$.

Question 42.

Calculer le nombre de multiplications et d'additions nécessaires pour faire une rotation avec une matrice de rotation ou avec un quaternion.

Question 43.

Calculer le nombre de multiplications et d'additions nécessaires pour enchainer deux rotations avec des matrices de rotation ou avec des quaternions.

Question 44.

Démontrer que $ij = k$ et $ki = j$ à partir des égalités $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Question 45.

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur unitaire et $\theta \in [0, 2\pi]$, demontrer que le quaternion de rotation $q = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\vec{u}]$ est un quaternion unitaire.

Question 46.

Démontrer que tout quaternion unitaire est un quaternion de rotation pour un certain vecteur unitaire $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ et un angle θ.
Faites le calcul pour le quaternion $q = \frac{1}{\sqrt{15}}(1 + 2i - j + 3k)$.

Question 47.

On définit la position d'une caméra dans l'espace par une rotation et une translation. On prend la rotation de 0.2 radians autour du vecteur (non unitare) $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)^\intercal$ et la translation par un vecteur $\vec{v}_2 = (20, 12, 2)^\intercal$. Calculer la matrice de changement de base qui permet de retrouver les coordonées d'un point depuis la position de la caméra.
Utiliser cette matrice pour calculer la projection sur un plan à distance $d = 1$ de la caméra du triangle avec sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$.